

# Identificación de cometas de baja actividad

Juan Lacruz

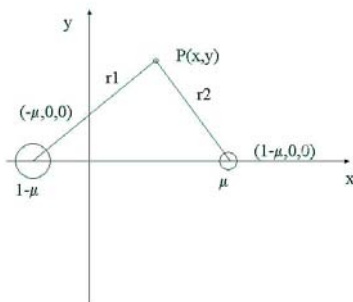
Observatorio La Cañada, marzo 2004

## Introducción

Se presenta de forma didáctica el problema circular restringido de los tres cuerpos, se discuten las curvas de velocidad cero y se introducen los puntos de Lagrange. También se introduce el parámetro de Tisserand y se muestra como se puede utilizar para la clasificación en familias dinámicas de los objetos del Sistema Solar. Finalmente se detalla una aplicación práctica para la identificación de cometas de baja actividad.

## El problema circular restringido de los tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos es uno de los más antiguos en mecánica celeste, en el caso general sorprendentemente no se conoce una solución expresable analíticamente. Para hacerlo más tratable se considera un sistema idealizado en el que los dos cuerpos principales no se ven afectados en su movimiento por la masa despreciable del tercer cuerpo o masa de prueba (problema restringido) y en el que los dos cuerpos principales orbitan entorno a su centro de masas siguiendo órbitas circulares (problema circular).



Leonard Euler (1772) introdujo un sistema de coordenadas en rotación con origen en el centro de masas. Para simplificar el tratamiento del problema se eligen las unidades de tal modo que  $Gm_2 = \mu$  y  $Gm_1 = 1 - \mu$  donde  $G$  es la constante de la gravitación, la suma de

ambas masas en estas unidades es 1, La escala de distancias se toma de modo que la distancia entre las masas principales sea 1, además, en el problema circular, el sistema gira con velocidad angular constante y se toma el periodo igual a la unidad de tiempo.

## La integral de Jacobi

El pseudo potencial del sistema en rotación está descrito por

$$F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (1)$$

Que tiene los términos de potencial gravitatorio debidos a ambas masas y el término centrífugo debido a la rotación.

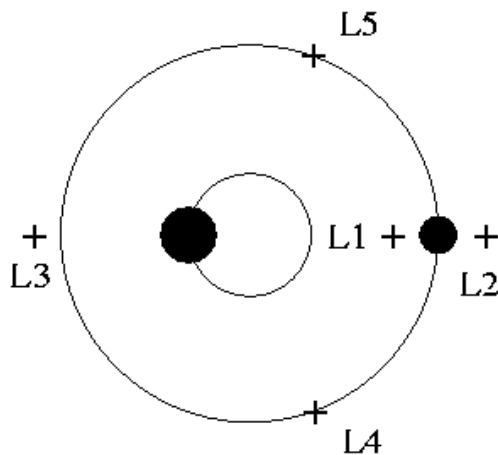
La resolución de las ecuaciones de movimiento conduce a la siguiente integral de Jacobi (1836)

$$v^2 = 2F - C \quad (2)$$

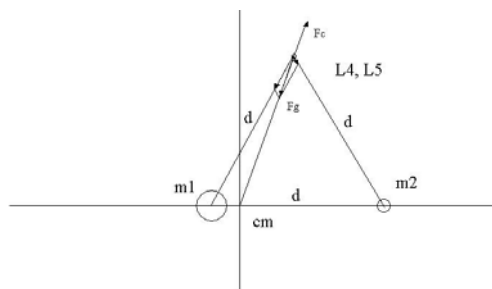
Donde  $v$  es la velocidad del cuerpo y  $C$  es la constante de Jacobi que es la única integral exacta conocida del problema circular restringido de los tres cuerpos y es básicamente una descripción de la energía del cuerpo corregida por la rotación. Hill (1878) utilizó esta integral para demostrar que la distancia Tierra-Luna permanece siempre acotada superiormente.

## Puntos de Lagrange, Troyanos

Al resolver las ecuaciones del movimiento se encuentran cinco puntos fijos denominados puntos de Lagrange o puntos de libración, y representan puntos de estabilidad, en estos cinco puntos se equilibra la fuerza centrífuga que actúa sobre la masa de pruebas con las fuerzas gravitatorias ejercidas por las masas principales. Dos de estos puntos, L4 y L5 forman un triángulo equilátero con las dos masas principales, los otros tres están en la línea recta que las une.



Mientras que los puntos L4 y L5 son de equilibrio estable los L1, L2 y L3 son de equilibrio inestable o cuasi-estable pues con pequeñas correcciones de vez en cuando se puede mantener una órbita entorno a ellos..



En los puntos de Lagrange L4 y L5, la fuerza centrífuga, dirigida en la dirección opuesta al centro de masas se equilibra con la resultante de las fuerzas gravitatorias

Los puntos de Lagrange son muy conocidos después de haberse encontrado en las regiones entorno a L4 y L5 de Júpiter unas familias de asteroides, los Troyanos, también se han encontrados cuerpos en órbitas en las

zonas correspondientes a los puntos L4 y L5 de marte, en las listas del Minor Planet Center figura actualmente un único Troyano conocido de Neptuno.

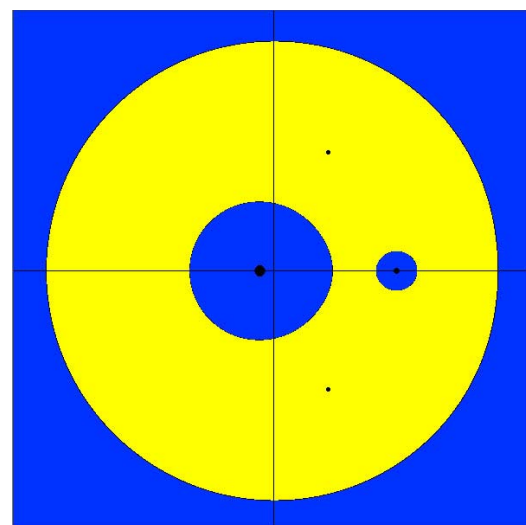
## Curvas de velocidad cero

Combinando (1) y (2) tenemos

$$v^2 = (x^2 + y^2) + 2 \frac{(1-\mu)}{r_1} + 2 \frac{\mu}{r_2} - C \quad (3)$$

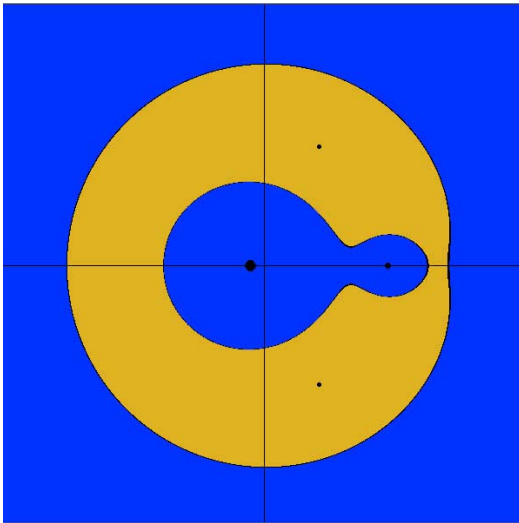
Si ponemos que la velocidad sea 0 tendremos la ecuación de una curva en el plano x,y, asignando un valor concreto a C podemos dibujar la curva en la cual la velocidad del cuerpo respecto al sistema en rotación se anula. Para cada valor de la constante de Jacobi, un cuerpo está confinado a la región interna o externa delimitada por la curva de velocidad cero correspondiente a ese valor de C.

En los siguientes ejemplos se han dibujado las curvas de velocidad cero para los valores de C que se indican, además se han indicado la masa principal, la secundaria, el sistema de coordenadas con origen en el centro de masas y los puntos L4 y L5 de Lagrange.



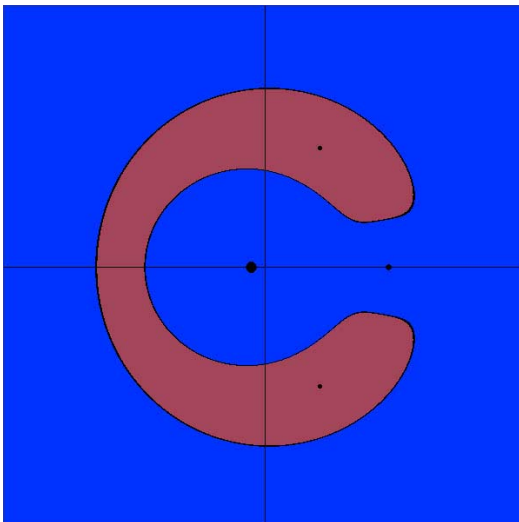
$\mu=0.1, C=4$

En este caso la masa de pruebas no puede moverse en la zona de exclusión marcada en amarillo.



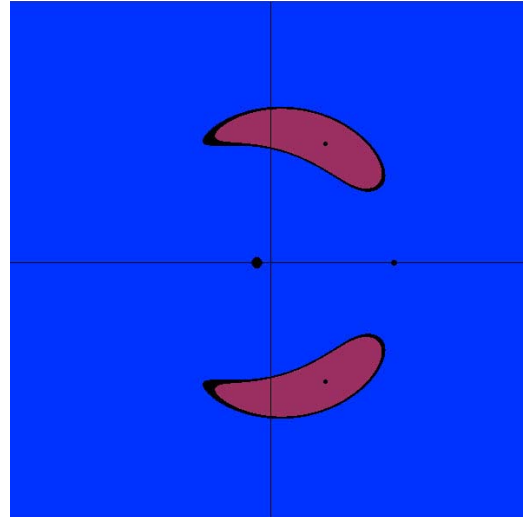
$\mu=0.1, C=3.5$

Para  $C=3.5$  ya se ha abierto un pasillo entre las masas principales y la masa de pruebas puede orbitar entorno a cualquiera de ellas



$\mu=0.1, C=3.2$

En el caso  $C=3.2$  se ha abierto otro pasillo al exterior de modo que la masa de pruebas puede orbitar entorno a cualquiera de las masas e incluso escapar de su atracción.

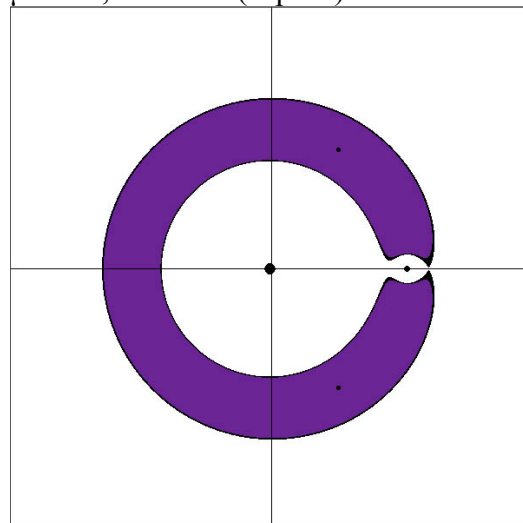


$\mu=0.1, C=3.0$

Para  $C=3$  la masa de pruebas puede escapar al infinito, las únicas zonas prohibidas son las señaladas, que corresponden precisamente con las zonas de estabilidad de los puntos  $L_4$  y  $L_5$  de Lagrange, se necesita un  $C < 3$  para poder acceder a estas zonas.

Estamos interesados concretamente en el caso en el que el planeta es Júpiter, para éste la relación de masas  $\mu$  es 0.001, en el siguiente gráfico que se ha contruido para  $C=3.146$  se vé que para valores superiores de  $C$  la masa de pruebas estará confinada a órbitas interiores o exteriores a Júpiter.

$\mu=.001, C=3.146$  (Júpiter)



## El parámetro de Tisserand

Tisserand, estudiando el problema de los tres cuerpos, dedujo que en el caso de un cometa que se acerca a un planeta y es perturbado en su trayectoria, el parámetro :

$$T_p = \frac{a_p}{a} + 2 \cdot \cos(i) \cdot \sqrt{\frac{a}{a_p} \cdot (1 - e^2)} \quad (4)$$

Debe conservarse.

$a_p$	semieje menor del planeta
$a$	semieje mayor del cometa
$i$	inclinación órbita del cometa
$e$	excentricidad del cometa

Este parámetro es una aproximación de la constante de Jacobi C tiene la ventaja de que resulta muy fácil de calcular en base a los elementos orbitales  $e$ ,  $i$  y  $a$ .

El parámetro de Tisserand se utiliza como test para identificar objetos antes y después de su perturbación por un planeta ya que el valor anterior y posterior al encuentro debe ser el mismo.

En particular, es fácil ver que, en el caso de un cometa parabólico que se encuentra con un planeta en el plano de su órbita ( $i=0$ ) el resultado de la perturbación implica un cambio de la excentricidad es decir que o bien resulta capturado en órbita periódica ( $e < 1$ ) o bien sale despedido en trayectoria hiperbólica ( $e > 1$ )

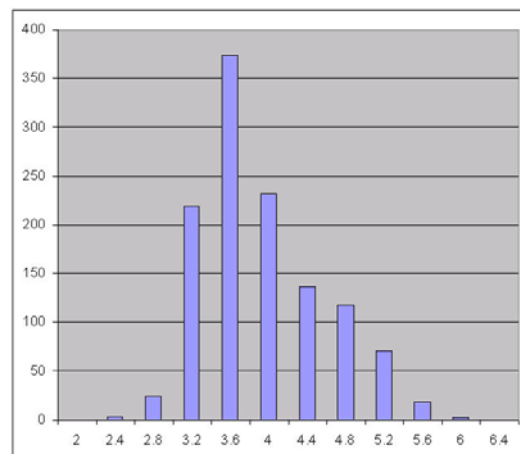


François-Félix Tisserand 1845 –1896, Matemático, nacido en Francia, fue director del Observatorio de París

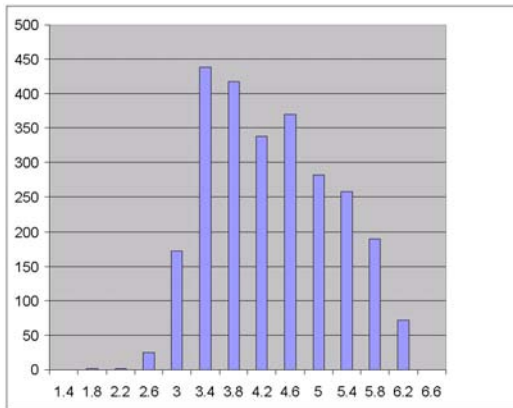
## Taxonomía de cuerpos menores

El parámetro de Tisserand respecto a Júpiter se ha utilizado para clasificar los cometas periódicos así como otros cuerpos menores en diferentes familias dinámicas,

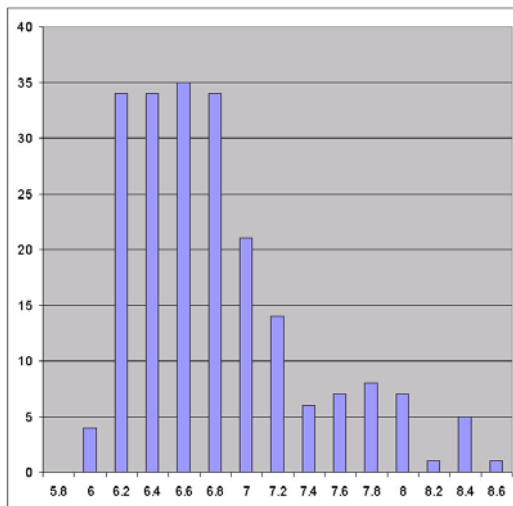
Existen tres tipos de asteroides que son del máximo interés dado que sus órbitas les aproximan a veces a la Tierra, estos son los de tipo Aten, Apollo y Amor, a continuación se muestran los histogramas de sus parámetros de Tisserand respecto a Júpiter



Distribución Tj para el tipo Amor, nótese que hay unos cuantos con Tj<3

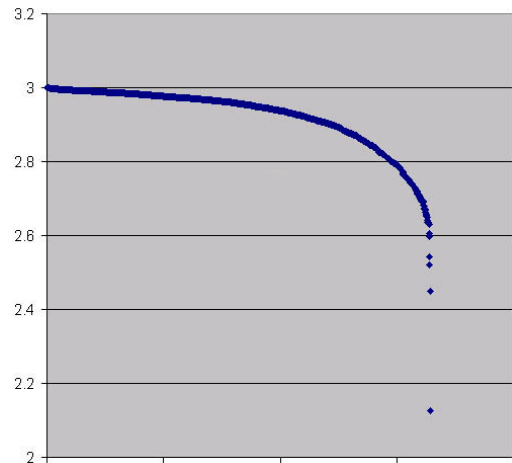


Distribución de Tj para los Apollo, también existe un número de ellos con Tj < 3



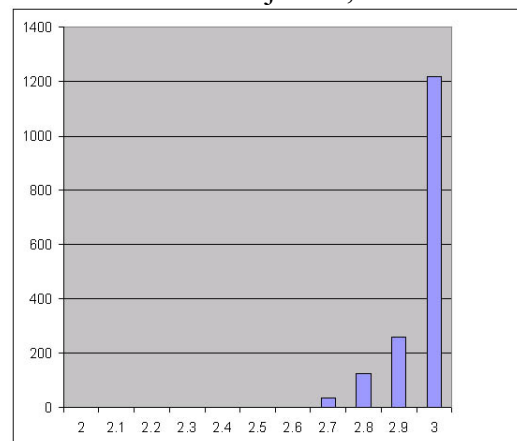
Distribución para el grupo Aten, todos los valores están muy por encima de 3, aquí no hay duda.

Así, por ejemplo, la distribución de éste parámetro para los troyanos de Júpiter es la que se muestra en la siguiente figura,



Distribución de Tj para los Troyanos de Júpiter, nótese que Tj<3 y el valor extremadamente bajo 2.1 para 2002 GE39

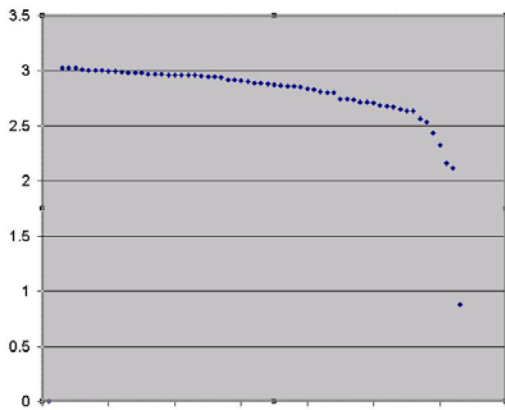
A continuación se muestra el histograma de la distribución, en el que muestra el número de cuerpos que tienen un valor de Tj dado,



Los Troyanos son un tipo muy especial de asteroides, se piensa que pueden ser origen de nuevos cometas o bien los núcleos sin actividad de antiguos cometas.

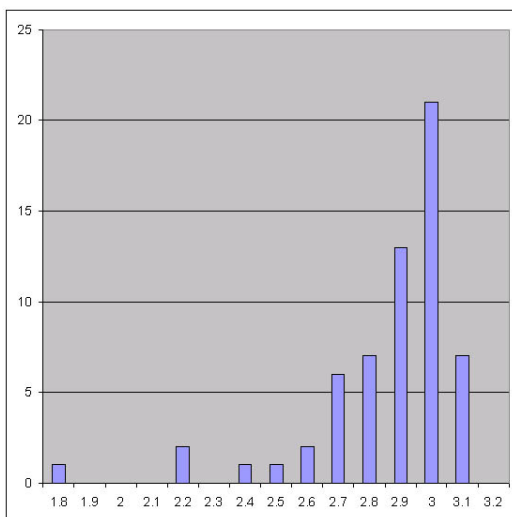
En este caso Tj está comprendido entre 3.208 y 3.227

Sin embargo, en el caso de los cometas periódicos el parámetro Tj siempre es < 3, en la siguiente figura se muestra la distribución de Tj de los cometas con designación de periódicos,



Es de notar el valor muy bajo de  $T_j = 0.88$  para el 153P/2002 C1 (Ikeya-Zhang) que se debe a que éste es el cometa periódico que tiene una excentricidad mayor (.99)

El histograma para los cometas periódicos es :



El parámetro  $T_j$  tiende a situarse en valores  $< 3.14$  con pocas excepciones.

En resumen, se podría decir que el parámetro de Tisserand es un buen criterio, para separar los cuerpos menores en familias dinámicas.

### Identificación de cometas de baja actividad

Hay una serie de cuerpos en el Sistema Solar que están clasificados como asteroides por no haberseles detectado ninguna actividad cometaria pero que por su órbita pertenecen a la familia

dinámica de los cometas. Estos objetos son claros candidatos a “convertirse” en cometas tras su observación durante su acercamiento al perihelio momento en el que se suele incrementar la actividad y se les podría detectar coma.

Por otra parte, cuando se produce el descubrimiento de un nuevo objeto de apariencia asteroidal, el MPC publica una circular en la que se muestran los elementos orbitales  $a, e, i$ , esto nos permitirá calcular el  $T_j$  y si es menor que 3 deberemos estar atentos a la posible detección de actividad cometaria.

Seguidamente se muestra una lista de los últimos objetos descubiertos de este tipo ( $T_j < 3$ ) que parecen asequibles para su observación con instrumentos de aficionado,

Designación	Perihelio	$T_j$	MPEC	Comentarios
2004 CK39	2004-05-08.6	2.99	x	NEO
2004 DO29		2.77	x	Incierto
2004 CM111	2003-07-01.8	2.80	x	Pasado el perihelio
2004 DZ61		0.80	x	Acaba de pasar el perihelio
2004 DA62		1.99	x	Acaba de pasar el perihelio

Según escribo estas líneas se ha detectado actividad cometaria en el 2004 DO29 que ha pasado a denominarse P/2004 DO29.

### Referencias

J. Horner, N. Evans, M. Bailey and D. Asher (2003) The populations of comet like bodies in the Solar System.

H. Kosai (1992) Short period comets and Apollo-Amor-Aten type asteroids in view of Tisserand invariant.

J. Danby (1962) Fundamentals of celestial mechanics